

Examen

La consultation des notes de cours et la manipulation des appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, ...) sont interdites.

Exercice 1 Donnez des réponses concises aux questions de cours suivantes.

1. Classez les mathématiciens suivants dans l'ordre chronologique : Cardan, Descartes, Euclide, Euler, al-Khwārizmī, Leibniz. Pour chacun d'entre eux, indiquez son principal apport aux mathématiques.
2. A quelle époque et dans quel but la trigonométrie fut-elle créée ?
3. Donnez deux indices qui montrent que les techniques mathématiques de la civilisation mésopotamienne ont été transmises aux mathématiciens grecs de l'Antiquité.
4. A quels domaines des mathématiques les savants de la civilisation médiévale arabe (du VII^e au XIV^e siècle apr. J.-C.) ont-ils fait faire des avancées importantes ? Citez les noms de deux mathématiciens de cette civilisation, en mentionnant pour chacun d'eux le siècle auquel il a vécu et une de ses contributions aux mathématiques.
5. Les mathématiques sont une création humaine et leur développement reflète les conditions dans lesquelles vivaient les hommes qui les ont développées. Pour chacune des trois situations suivantes : le monde grec au VI^e–II^e siècle av. J.-C., l'Italie au XIII^e–XV^e siècle, et l'Europe au XVIII^e siècle, citez un élément du contexte social, culturel, scientifique ou économique qui a influé sur le développement des mathématiques et décrivez le résultat de cette influence.
6. Citez deux querelles de priorité célèbres en mathématiques. Pour chacune d'entre elles, donnez le nom des protagonistes et l'enjeu, l'issue et la date approximative de la querelle.

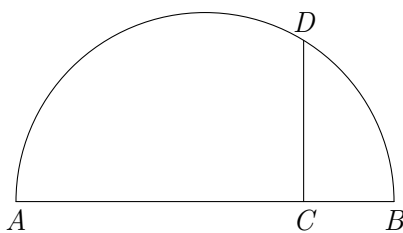
Exercice 2 Pour trouver le maximum ou le minimum d'une quantité $p(a)$ dépendant d'une variable a , Fermat (1601–1665) recommandait d'utiliser la méthode suivante. D'abord, il faut écrire une « adégalité¹ » $p(a+e) \sim p(a)$, puis il faut la simplifier de sorte de ne garder que des termes qui sont multiples de e . Ensuite, on divise tous les termes par e . Cela fait, on supprime tous les termes dans lesquels e apparaît encore (cette suppression équivaut à la substitution $e = 0$). On obtient alors une équation dont les solutions sont les valeurs de a maximisant ou minimisant la quantité $p(a)$.

Le texte présenté dans l'encadré ci-après a été écrit par Fermat vers 1644 pour illustrer une variante de cette méthode. Certains points du texte sont obscurs ; il n'est toutefois pas nécessaire de comprendre en détail les idées de Fermat pour pouvoir traiter l'exercice, à l'exception peut-être de la question 3.

¹Fermat utilise ici la traduction du mot grec $\pi\alpha\rho\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$, que Diophante avait forgé pour dire « égalité approchée ».

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux ; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore ; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué sur [l'exemple qui suit] :

Soit un demi-cercle de diamètre AB , avec la perpendiculaire DC au diamètre. On demande le maximum de la somme $AC + CD$.



Soit b le diamètre, posons $AC = a$; on aura donc $CD = \sqrt{ba - a^2}$. La question est ramenée à rendre maximale la quantité $a + \sqrt{ba - a^2}$.

En appliquant les règles de la méthode [du maximum et du minimum], on arriverait à adégaler des expressions dont le degré serait trop élevé ; désignons donc par u la quantité maximale ; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage (...) de représenter par des voyelles les quantités inconnues ?

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = u$; donc $u - a = \sqrt{ba - a^2}$, et en élevant au carré :

$$u^2 + a^2 - 2ua = ba - a^2.$$

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où u figure à la plus haute puissance ; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne

$$ba - 2a^2 + 2ua = u^2.$$

Mais par hypothèse u est la quantité maximale ; donc u^2 , carré d'une quantité maximale, sera lui-même un maximum ; par conséquent,

$$ba - 2a^2 + 2ua \quad (\text{expression égale à } u^2)$$

sera un maximum. [Dans cette expression] ne figure d'ailleurs aucun radical ; traitons-la avec la méthode [du maximum et du minimum], comme si u était une quantité connue. Nous aurons l'adégalité

$$ba - 2a^2 + 2ua \sim ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2ua + 2ue.$$

Supprimons les termes communs, et divisons les autres par e ,

$$b + 2u \sim 2e + 4a.$$

Supprimons $2e$, [comme le veut] la règle ; nous aurons

$$b + 2u = 4a, \quad \text{d'où} \quad 4a - b = 2u \quad \text{et} \quad 2a - \frac{1}{2}b = u.$$

Cette égalité étant établie d'après la méthode, il faut revenir à la première [égalité], dans laquelle nous avons posé $a + \sqrt{ba - a^2} = u$. Mais nous venons de trouver $u = 2a - \frac{1}{2}b$; donc

$$2a - \frac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}, \quad \text{d'où} \quad a - \frac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}.$$

(...) De cette dernière équation on tirera la valeur de a correspondant au maximum cherché.

Lisez le texte de Fermat et répondez aux questions suivantes :

1. Fermat choisit de représenter la grandeur connue par une consonne b et les grandeurs inconnues par des voyelles a et u . Quel mathématicien a-t-il eu, le premier, l'idée d'une telle convention ?
2. A quelle époque et chez quel mathématicien est née l'idée (utilisée ici par Fermat) d'utiliser le calcul algébrique pour résoudre un problème de géométrie ? Quelles problématiques générales motivaient les réflexions de ce mathématicien ? Ce mathématicien popularisa sa méthode en montrant qu'elle permettait de résoudre un problème qui, à l'époque, était jugé difficile : quel est le nom de ce problème ?
3. Dans le texte reproduit ci-dessus, Fermat applique sa méthode d'adégalisation non pas directement sur l'expression $p(a) = a + \sqrt{ba - a^2}$, mais sur une autre quantité. Laquelle ? Pour quelle raison Fermat utilise-t-il ce chemin détourné ?
4. Newton et Leibniz ont inventé le calcul différentiel vingt à trente ans après que Fermat a écrit ce texte. Rappelez brièvement (en une ou deux phrases) en quoi consiste cette invention et quels genres de question elle permet de résoudre.
5. Utilisez le calcul différentiel (soit dans la formulation de Newton, soit dans celle de Leibniz, soit dans sa forme moderne) pour résoudre le problème de maximum abordé ci-dessus par Fermat. Comparez les degrés de difficulté causés par la présence de la racine carrée dans l'expression à maximiser, selon qu'on utilise la méthode d'adégalisation ou le calcul différentiel.